Lycée IBN KHALDOUN RADES	Devoir de synthèse n°1	Classe : $4M_1$
	MATHEMATIQUES	Durée : 3h
Mr ABIDI Farid	04/12/2007	Coef. : 4

Le sujet comporte 3 pages dont la page -3- est à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 1 : (5 points)
NB : les deux parties A et B sont indépendantes.

A- Démonstration de cours .

On donne deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) (u_n) est croissante et (v_n) décroissante,

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

1. a) Montrer que les conditions (i) et (ii) entraînent les inégalités : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n$ puis en déduire que (v_n) est convergente.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Enoncer théorème de cours ainsi démontré.

B- QCM

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes sans aucune justification.
Toute réponse exacte rapporte 0,50 point, une réponse inéxacte entraîne le retrait de 0,25 point et l'absence de réponse entraîne le retrait de 0,50 point. Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. a) Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
   b) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+7}$
   a) f est dérivable en 3 et f'(3) = $\frac{3}{4}$.
   b) $f(3{,}001) \approx f'(3) + 0{,}001 \times f(3)$.
   c) $f(3{,}001) \approx 4{,}00075$

Exercice 2 : (5 points)

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi^2]$ par f(x) = $\cos(\sqrt{x})$.

1. a) Vérifier que pour tout x de $[0,\pi^2[$, $f(x) - 1 = -\dfrac{\sin^2(\sqrt{x})}{1+\cos(\sqrt{x})}$.

b) En déduire que, pour tout x de $\left]0,\pi^2\right[$, $\dfrac{f(x)-1}{x} = -\left[\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{1+\cos\left(\sqrt{x}\right)}$

c) Démontrer enfin que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$.

2. a) Etudier la dérivabilité de f sur $\left]0,\pi^2\right]$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\left]0,\pi^2\right]$.

b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3. a) Résoudre dans $\left[0,\pi^2\right]$ l'équation f(x) = 0.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Exercice 3 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On appelle g l'application du plan (P) dans lui-même qui a tout point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z', définie par : $z' = i\bar{z}+1+i$.

1. a) Montrer que g ne fixe aucun point.

b) Pour tous points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, on pose $M_1' = g(M_1)$ et $M_2' = g(M_2)$.

Montrer que $z_2' - z_1' = i\overline{(z_2 - z_1)}$. En déduire que g est une isométrie.

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = -1$ et $z_C = 1+2i$

a) Déterminer les images des points A et B par g. En déduire que g n'est pas une translation.

b) En déduire la nature de g puis caractériser g.

Exercice 4 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ') et quatre points distincts A, B, C et D tels que : A et C sont sur la droite (Δ), B et D sont sur (Δ'), AC = BD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On suppose que les segments [AC] et [BD] n'ont pas même milieu.

Voir figure page 3.

1. a) Justifier qu'il existe une rotation R_1 qui envoie A sur B et C sur D dont on précisera la mesure principale θ_1 de son angle.

b) Construire Ω_1 le centre de R_1.

2. Montrer qu'il existe une rotation R_2 qui envoie D sur A et B sur C dont on précisera la mesure principale θ_2 de son angle et construire son centre Ω_2.

3. On désigne par M le milieu de [AC] et N celui de [BD].

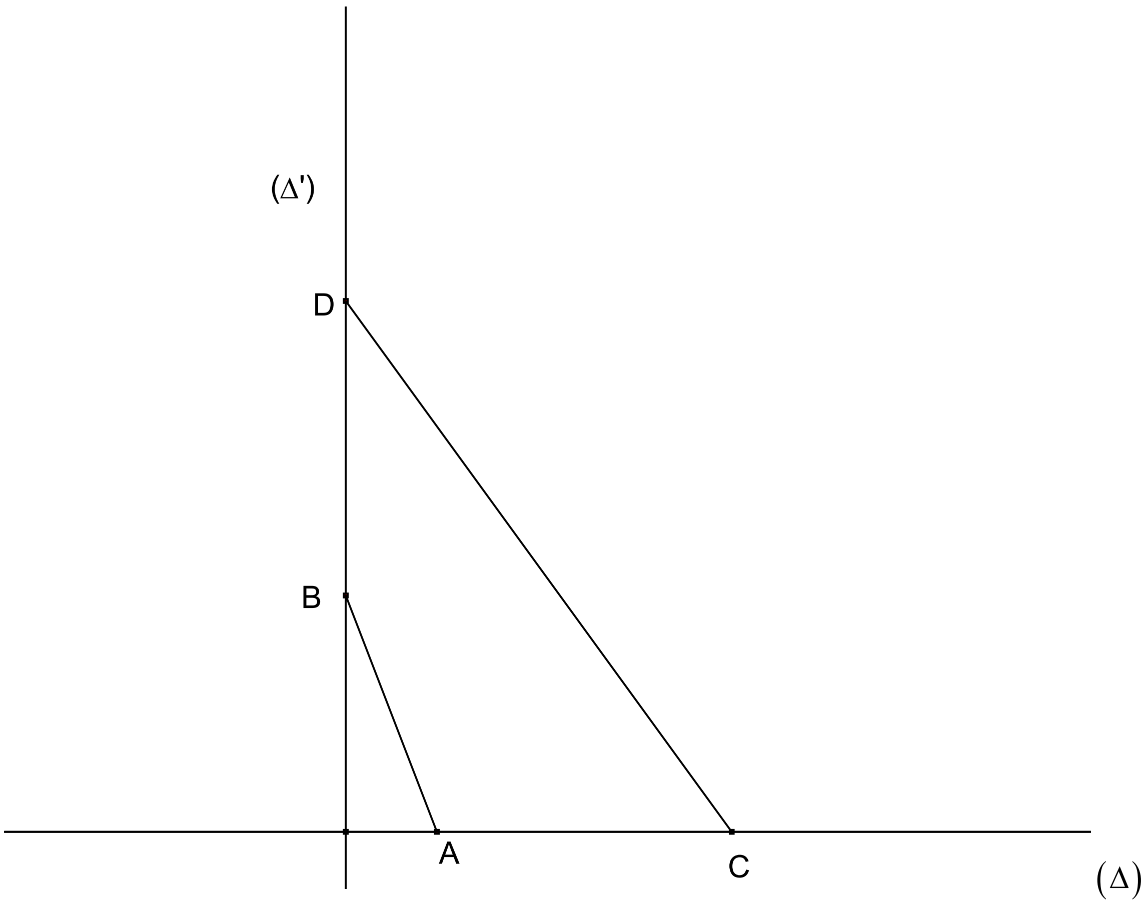
a) Montrer que $R_1(M) = N$ et $R_2(N) = M$.

b) En déduire la nature du quadrilatère $\Omega_1 M \Omega_2 N$.

4. Caractériser l'application $R_2 \circ R_1$

Nom & Prénom de l'élève : ……………………………………..

Figure à compléter et à rendre avec la copie



Exercice 1 :

A. Démonstration de cours

1.a) La condition (i) entraîne que la suite (v_n) est majorée par son premier terme v_0 donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \le v_0$.

En utilisant de plus la relation (ii), on obtient : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \le v_n \le v_0$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc (u_n) est convergente.

2. La suite (u_n) est croissante donc (u_n) est minorée par son premier terme u_0, d'où pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_0 \le u_n$.

En utilisant de plus la relation (ii), on obtient : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_0 \le u_n \le v_n$.

La suite (v_n) étant décroissante et minorée par u_0, il résulte que (v_n) est convergente.

3. (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4. Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la limite.

B. QCM

1. a) Faux ; b) Vrai

2. a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai

Exercice 2 :

1.a) Pour tout x de $\left[0,\pi^2\right[$, $0 \le \sqrt{x} < \pi$ donc $\cos\left(\sqrt{x}\right) \ne -1$.

f(x) - 1 = $\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 = \dfrac{\cos^2\left(\sqrt{x}\right) - 1}{\cos\left(\sqrt{x}\right) + 1} = \dfrac{-\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{1 + \cos\left(\sqrt{x}\right)}$.

b) Pour tout x de $\left]0,\pi^2\right[$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - 1}{x} = -\dfrac{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{x\left(1 + \cos\left(\sqrt{x}\right)\right)} = -\left[\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right]^2 . \dfrac{1}{1 + \cos\left(\sqrt{x}\right)}$.

c) On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 1$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to0^+} \cos\left(\sqrt{x}\right) = \cos 0 = 1$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2\. a) La fonction u : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left]0,\pi^2\right]$, $u\left(\left]0,\pi^2\right]\right)=\left]0,\pi\right]$ et la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\left]0,\pi\right]$. Par conséquent, f est dérivable sur $\left]0,\pi^2\right]$.

Pour tout x de $\left]0,\pi^2\right]$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos'\left(\sqrt{x}\right)=-\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

b) f'(x) = 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(\sqrt{x}\right)=0\\ 0<x\le\pi^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ 0<\sqrt{x}\le\pi\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\pi \Leftrightarrow x=\pi^2$.

D'autre part : $0<x<\pi^2 \Rightarrow 0<\sqrt{x}<\pi \Rightarrow 0<\sin\left(\sqrt{x}\right)<1$ il en résulte que pour tout x de $\left]0,\pi^2\right[$, f'(x)<0.

x	0		π^2
f'(x)	$-\frac{1}{2}$	-	0
f(x)	1	↘	-1

3.a) $x\in\left[0,\pi^2\right]$, f(x) = 0 $\Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{x}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Comme $0\le\sqrt{x}\le\pi$, $\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}$ ou encore $x=\frac{\pi^2}{4}$.

b) la tangente (T) à l courbe (C) au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$ est d'équation $y=f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x-\frac{\pi^2}{4}\right)+f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$

les calculs donnent $f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)=0$ et $f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)=-\frac{1}{\pi}$, donc (T) : y = $-\frac{1}{\pi}x+\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 :

1. a) M est un point fixe de f $\Leftrightarrow g(M)=M \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow i\bar{z}+1+i=z$.

   On pose z = x + iy avec (x, y) $\in\mathbb{R}^2$, on obtient :

   $i(x-iy)+1+i=x+iy \Leftrightarrow y+1+i(x+1)=x+iy \Leftrightarrow -x+y+1+i(x-y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y+1=0\\ x-y+1=0\end{cases}$

   Ce système est impossible (la somme membre à membre de ses deux équations donne 2 = 0) donc g ne fixe aucun point.

b) On a : $M_1' = g(M_1) \Leftrightarrow z_1' = -\overline{z_1} + 1 + i$ et $M_2' = g(M_2) \Leftrightarrow z_2' = -\overline{z_2} + 1 + i$.

D'où $z_2' - z_1' = i(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = i\overline{(z_2 - z_1)}$.

Par suite, $M_1'M_2' = |z_2' - z_1'| = |i\overline{(z_2 - z_1)}| = |i|.|\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$.

Ce qui montre que g est une isométrie.

2. a) Pour z = $z_A = 1$, z'=i + 1 +i = 1 + 2i = z_C donc g(A) = C.

Pour z = $z_B = -1$, z' = -i + 1+ I = 1 = z_A donc g(B) = A.

$Z_{\overrightarrow{AC}} = 2i$ et $Z_{\overrightarrow{BA}} = -2$ donc $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BA}$ d'où g n'est une translation.

b) g est une isométrie , distincte d'une translation, ne fixant aucun point donc g est une symétrie glissante.

Désignons par (Δ) l'axe de g et par $\vec{u}$ son vecteur.

Comme $g \circ g = t_{2\vec{u}}$ et $(g \circ g)(B) = g(A) = C$ alors $2\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ ou encore $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

g(B) = A et O milieu de [BA] $\Rightarrow O \in (\Delta)$

g(A) = C et I(1 + i) milieu de [AC] $\Rightarrow I \in (\Delta)$

On a $I \neq O$ donc $(\Delta) = (OI)$.

Exercice 4 :

1. a) On a : AC = BD , $A \neq C$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc il existe une rotation R_1 unique qui envoie A sur B et C sur D d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

b) Ω_1 le centre de la rotation R_1 est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [BD].

2. 2. On a : BD = AC , $D \neq B$ et $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}})[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

donc il existe une rotation R_2 unique qui envoie D sur A et B sur C d'angle $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

3.a) M milieu de [AC] donc R_1(M) milieu de [R_1(A) R_1(C)]= [BD].

Or N est milieu de [BD] alors R_1(M) = N.

N milieu de [BD] donc R_2(N) milieu de [R_2(B) R_2(D)]= [AC].

b) R_1(M) = N donc Ω_1MN est un triangle isocèle, rectangle en Ω_1 et direct.

R_2(N) = M donc Ω_2NM est un triangle isocèle, rectangle en Ω_2 et direct.

Il en résulte que $\Omega_1M\Omega_2N$ est un carré.

4. $R_2 \circ R_1$ est la composée de deux déplacements de même angle $\frac{\pi}{2}$ donc $R_2 \circ R_1$ est un déplacement d'angle π d'où $R_2 \circ R_1$ est une symétrie centrale.

Comme $R_2 \circ R_1(M) = R_2(N) = M$ alors M est le centre de $R_2 \circ R_1$.

Ainsi $R_2 \circ R_1 = S_M$